# Vorlesung 9a

# Markovketten

## Teil 1

## Markovketten als
## spezielle mehrstufige Zufallsexperimente

(Buch S. 94)

Zur Erinnerung:

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

hat man für jedes $i = 1, 2, \ldots$

*Übergangswahrscheinlichkeiten*

$$P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1}) = \mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}) ,$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i+1)$-ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \ldots, X_i = a_i\}$.

*Eine wichtige Beispielklasse mehrstufiger Zufallsexperimente:*

alle $X_i$ haben ein-und denselben Wertebereich $S$

und die Übergangswahrscheinlichkeiten der nächsten Stufe

hängen nur von der aktuellen Stufe ab

(und nicht von den vorhergehenden):

$$P(\dots a_{i-2}\, a_{i-1}, a_i) = P(a_{i-1}, a_i)$$

In dem Fall spricht man von einer **Markovkette**

auf dem Zustandsraum $S$ mit Übergangsmatrix $P$.

Die Stufen sind jetzt mit $i = 0, 1, 2, \ldots$ indiziert.

Man denkt sich die Übergangsmatrix $P$ als fest

und notiert die Verteilung $\rho$ von $X_0$ (die “Startverteilung”)

als Subskript bei der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}$.

Also insbesondere:

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a_0) = \rho(a_0).$$

Die Multiplikationsregel ergibt:

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a_0, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= \rho(a_0)P(a_0, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

Startet die Kette in $a \in S$,

dann ist $\rho$ die auf $a$ konzentrierte Verteilung

(notiert als $\rho = \delta_a$).

Statt $\mathbf{P}_{\delta_a}$ schreibt man auch $\mathbf{P}_a$

und erhält

$$\mathbf{P}_a(X_0 = a) = 1,$$

$$\boxed{\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = P(a, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n) \,.}$$

# Beispiele für Markovketten

(Buch S. 98)

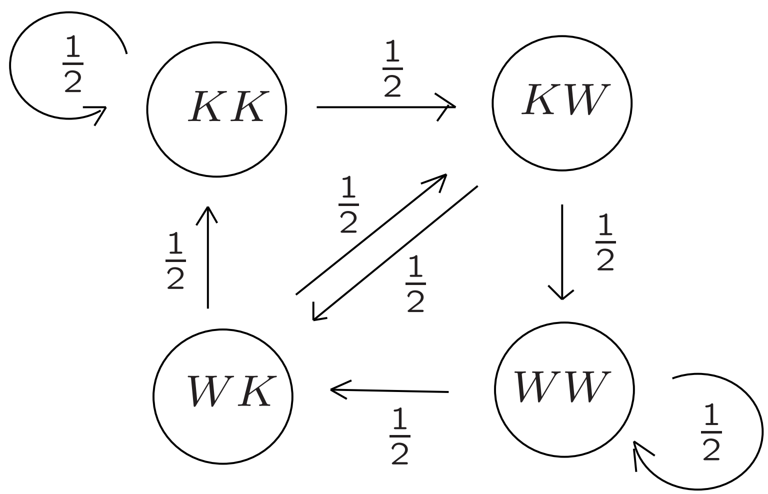
Beispiel 1:

**Muster der Länge 2 beim fairen Münzwurf**

$Z_0, Z_1, \ldots$ unabhängig und uniform verteilt auf $\{K, W\}$,

$$X_n := (Z_n, Z_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Graph der Übergangswahrscheinlichkeiten:



## Beispiel 2:

## $(p, q)$-Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:

Sei $p \in [0, 1]$, $q := 1 - p$, $S := \mathbb{Z}$

$$P(k, k + 1) := p, \quad P(k, k - 1) := q$$

Für die Markovkette $X$ mit Übergangsmatrix $P$ und Start in $a$ ist wegen der Multiplikationsregel $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ so verteilt wie $(a, a + Z_1, \ldots, a + Z_1 + \cdots + Z_n)$, wobei $Z_1, Z_2, \ldots$ unabhängig sind mit $\mathbf{P}(Z_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(Z_i = -1) = q$.

Daraus sieht man sofort:

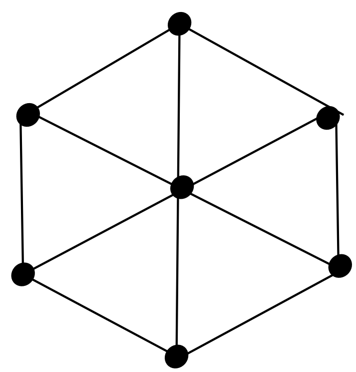
$$\mathbf{E}_a[X_n] = \mathbf{E}[a + Z_1 + \cdots + Z_n] = a + n(p - q),$$

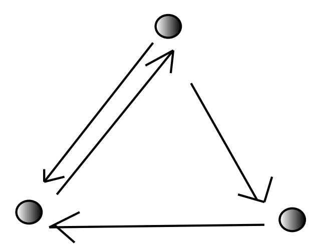
$$\mathbf{Var}_a[X_n] = \mathbf{Var}[a + Z_1 + \cdots + Z_n] = 4npq.$$

Beispiel 3:

Einfache Irrfahrt

auf einem (ungerichteten oder gerichteten) Graphen





$S :=$ die Menge der Knoten.

Der nächste Schritt erfolgt jeweils

zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.

Beispiel 4:

**Die Pólya-Urne als Markovkette auf $\mathbb{N}^2$**

$$S = \{(r,b) : r,b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$

$$P((r,b),(r+1,b)) := \frac{r}{r+b}\,,$$

$$P((r,b),(r,b+1)) := \frac{b}{r+b}\,.$$

Das modelliert dieselbe Situation wie in Vorlesung 8b2,
allerdings “sparsamer”:
als aktueller Zustand wird nicht der gesamte bisherige Pfad, sondern nur
die Anzahl der roten und blauen Kugeln in der Urne mitgeführt